المحاضرة التاسعة

الدكتورة : فداء **المادة : هيدروليك**

الجريان المثالي

المسألة الثانية عشرة صفحة 268

بتألف خزان من جزئين ، كما في الشكل . الجزء العلوي اسطواني ارتفاعه يساوي قطره D و الجزء السفلي على شكل مخروط ارتفاعه D أيضاً . و هو يحتوي على فتحتين متماثلتين قطر كل منها d ، الأولى في جانب الخزان عند منتصف ارتفاعه و الثانية في أسفله . احسب الزمن الكلي لتفرغ الخزان ، بافتراض أن ثابت التصريف هو نفسه للفتحتين .

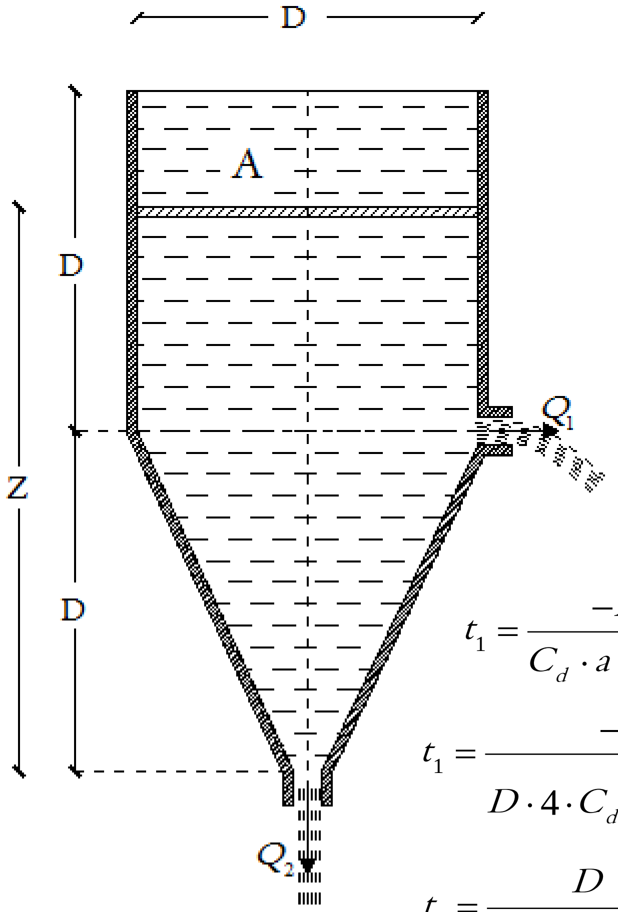
الحل :

الزمن اللازم للتصريف $t = t_1 + t_2$

حيث t_1 زمن تفرغ الخزان من الارتفاع 2D و حتى D و يكون التصريف في كل من الفتحتين أي $(Q_1 + Q_2)$

أما t_2 فهو زمن تفرغ الخزان من ارتفاع D و حتى 0 و يكون التصرف في الفتحة السفلية فقط أي Q_2

أولاً- حساب t_1



$$(Q_1 + Q_2)dt = -A \cdot dZ$$

$$t_1 = \int_{2D}^{D} \frac{-A \cdot dZ}{Q_1 + Q_2}$$

$$Q_1 = C_d \cdot a \cdot \sqrt{2g(Z-D)}$$

$$Q_2 = C_d \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot Z}$$

$$t_1 = \frac{-A}{C_d \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \int_{2D}^{D} \frac{dZ}{\sqrt{Z-D} + \sqrt{Z}}$$

نضرب البسط و المقام بمرافق المقام

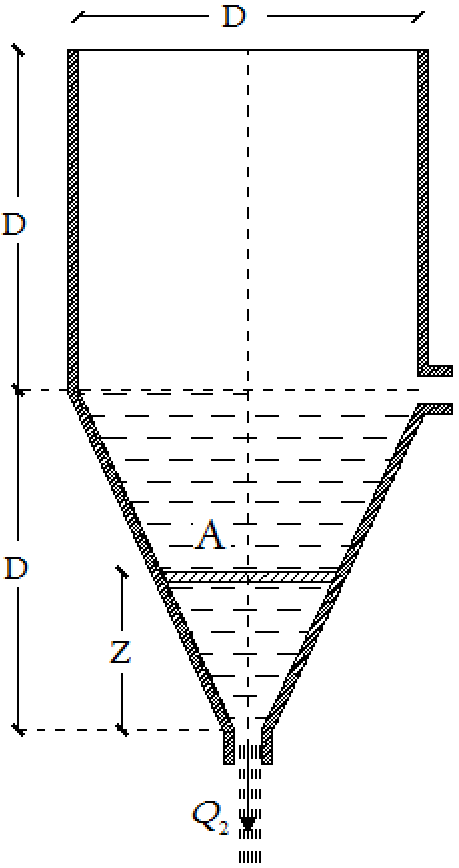
$$t_1 = \frac{-A}{C_d \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \int_{2D}^{D} \frac{\sqrt{Z} - \sqrt{Z-D}}{Z - Z + D}$$

$$t_1 = \frac{-\pi \cdot D^2}{D \cdot 4 \cdot C_d \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2g}} \left[\frac{2}{3} Z^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(Z-D)^{\frac{3}{2}} \right]_{D}^{2D}$$

$$t_1 = \frac{D}{C_d \cdot d^2 \cdot \sqrt{2g}} \left[\frac{2}{3} D^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(2D)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} D^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$\boxed{t_1 = \frac{0.55 \cdot D^{\frac{5}{2}}}{C_d \cdot d^2 \cdot \sqrt{2g}}}$$

ثانياً - حساب t_2



و ذلك بالتعويض بالقانون مباشرة

$$t_2 = \frac{-1}{C_d \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \int_D^0 A \cdot Z^{-\frac{1}{2}} \cdot dZ$$

لاحظ أن هذا القانون ليس مطابقا تماما للقانون المعطى في المحاضرة السابقة و إنما تم إدخال A إلى داخل التكامل و السبب أن مقطع الخزان متغيير

$$A = \frac{\pi \cdot x^2}{4}$$

من تشابه المثلثات $\frac{D}{x} = \frac{D}{Z} \Rightarrow x = Z$

$$A = \frac{\pi \cdot Z^2}{4}$$

$$t_2 = \frac{-1}{C_d \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2g}} \int_D^0 \frac{\pi \cdot Z^2}{4} \cdot Z^{-\frac{1}{2}} \cdot dZ$$

$$t_2 = \frac{-4 \cdot \pi}{4 \cdot C_d \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \sqrt{2g}} \int_D^0 Z^2 \cdot Z^{-\frac{1}{2}} \cdot dZ$$

$$t_2 = \frac{-1}{C_d \cdot d^2 \cdot \sqrt{2g}} \int_D^0 Z^{\frac{3}{2}} \cdot dZ$$

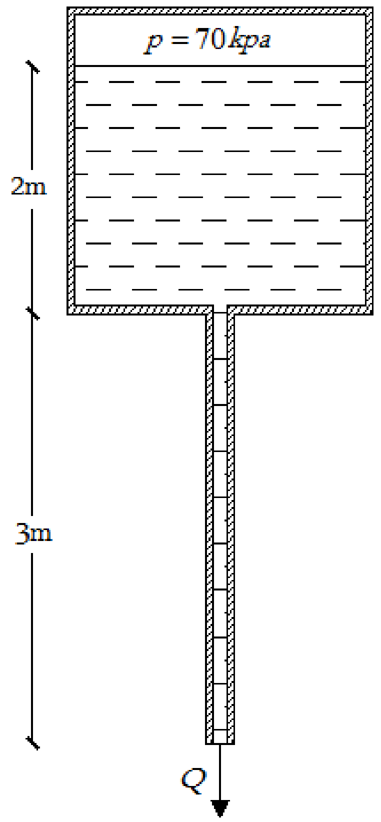
$$t_2 = \frac{-1}{C_d \cdot d^2 \cdot \sqrt{2g}} \left[\frac{2}{5} Z^{\frac{5}{2}}\right]_D^0$$

$$t_2 = \frac{-2}{5 \cdot C_d \cdot d^2 \cdot \sqrt{2g}} \left[Z^{\frac{5}{2}}\right]_D^0$$

$$\boxed{t_2 = \frac{0.4 \cdot D^{\frac{5}{2}}}{C_d \cdot d^2 \cdot \sqrt{2g}}}$$

و منه

$$\boxed{\Rightarrow t = t_1 + t_2 = \frac{0.95 \cdot D^{\frac{5}{2}}}{C_d \cdot d^2 \cdot \sqrt{2g}}}$$



مسألة خارجية :

احسب الزمن اللازم لتفرغ الخزان المبين بالشكل بشكل كامل علماً أن الخزان معرض لضغط قدره $p = 70kpa$ و

مقط الخزان على شكل مربع طول ضلعه 2m

قطر فتحة الخزان d=2cm و معامل تصريفها 0.65

الحل :

قانون التفريغ

$$t = \frac{-A}{C_d \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \int_5^3 Z^{-\frac{1}{2}} \cdot dZ$$

لدينا $Z = Z + \dfrac{p}{\gamma}$ أي أرتفاع الماء بالخزان بالإضافة إلى الضاغط الناتج عن الضغط الموجود في الخزان .

أي $$t = \frac{-A}{C_d \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \int_5^3 (Z + \frac{p}{\gamma})^{-\frac{1}{2}} \cdot dZ \quad \text{(A).....}$$

فكرة :

كيف وصلنا إلى العلاقة السابقة ؟

لو عدنا لاستنتاج القانون من أوله و الوارد في المحاضرة السابقة .سنجد

$$Q \cdot dt = -A \cdot dZ \; ....(1)$$

$$Q_a = C_d \cdot v \cdot a$$

و من معادلة بيرنولي سوف نجد أن $v = \sqrt{2g \cdot (Z + \dfrac{p}{\gamma})}$

و يتعويض قيمة v في Q_a ثم بتعويض قيمة Q_a الناتجة في العلاقة (1) نصل إلى العلاقة (A) المطلوبة .

$$t = \frac{-2 \times 2}{0.65 \times \pi \times \dfrac{(0.02)^2}{4} \sqrt{2 \times 9.81}} \int_5^3 (Z + \frac{p}{\gamma})^{-\frac{1}{2}} dZ$$

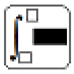
$$t = \frac{-4 \times 4}{0.65 \times \pi \times 0.02^2 \times \sqrt{2 \times 9.81}} \cdot \int_5^3 \left(Z + \frac{70 \times 10^3}{9.81 \times 10^3} \right)^{-\frac{1}{2}} dZ$$

$$t = 2653.14 \text{ sec}$$

فكرة :

كيف يمكننا حساب تكامل مثل التكامل السابق ؟
بكل بساطة عن طريق الألة الحاسبة . و لكن في مثالنا السابق كان المتغير الذي نكامل من أجله هو Z أما الألة الحاسبة فتكامل بالنسبة x فقط فما العمل
العمل بكل بساطة أن نبدل كل Z بـ x فتكتب العلاقة السابقة في الألة الحاسبة كما يلي

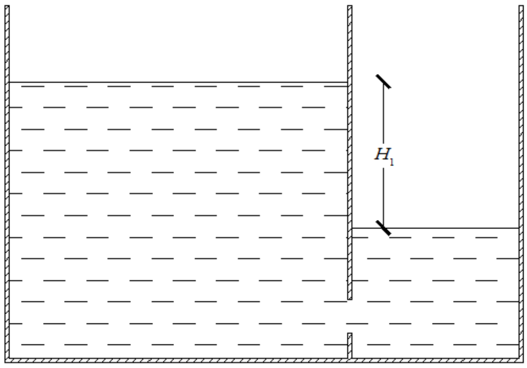
$$\frac{-4\times 4}{0.65\times\pi\times 0.02^2\times\sqrt{2\times 9.81}}\times\int_5^3 (x+\frac{70\times 10^3}{9.81\times 10^3})^{-\frac{1}{2}}dx$$

ولكي نكتب رمز التكامل نضغط على الزر 

و لكتابة الرمز π نضغط على الزر shift ثم الزر $\times 10^x$

مسألة خارجية مشابهة للمسألة السادسة عشرة الصفحة 270

لدينا الخزان المبين في الشكل .



مساحة الخزان الأيسر $A_1 = 20\,m^2$ ، مساحة الخزان الأيمن $A_2 = 10\,m^2$

مساحة الفتحة بين الخزانين $a = 20\ cm^2$ و معامل تصريف الفتحة $C_d = 0.8$

١ ـ احسب الزمن اللازم لرفع سطح الماء في الخزان الأيمن بمقدار 2m علما $H_1 = 4m$

٢ ـ احسب الزمن اللازم لكي يصبح سطح السائل في الخزان في مستو واحد علماً أن $H_1 = 4m$

٣ ـ احسب الزمن اللازم ليصبح فرق المنسوب بين الخزانين مساويا 2m إذا كانت مساحة الخزان الأيسر تساوي ∞ (أي مساحة الخزان الأيسر كبيرة جدا كأن يكون بحير مثلاً) ($H_1 = 4m$ ، $H_2 = 2m$)

الحل :

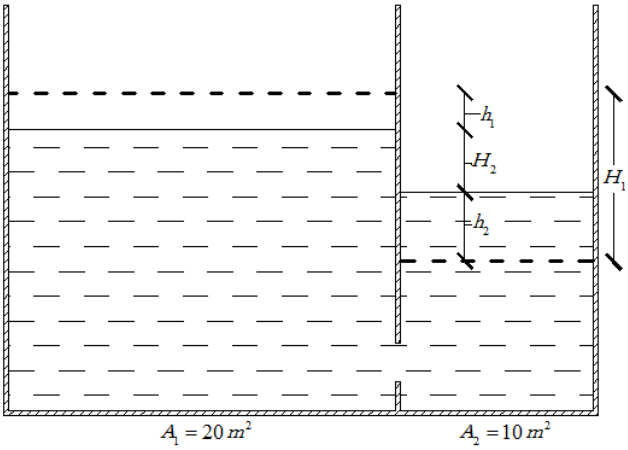
$$t = \frac{-2\cdot A_1\cdot A_2}{C_d\cdot a\cdot (A_1+A_2)\cdot\sqrt{2g}}\left[H_2^{\frac{1}{2}} - H_1^{\frac{1}{2}}\right]$$

حيث H_1 فرق المنسوب للماء الموجود في الخزانين في البداية .
H_2 فرق المنسوب للماء الموجود في الخزانين في النهاية .

توضيح فكرة H_1 ، H_2

لو كان لدينا خزانين متصلين مع بعضهما بفتحة أرتفاع الماء في الخزان الأول 10m و في الخزان الثاني 4m فيكون فرق المنسوب بينهما 10-4=6m أي $H_1 = 6m$
فلو تركنا الخزانين لمدة ثلاث دقائق مثلا فإن الماء سوف ينتقل من الخزان ذات ارتفاع الماء الأعلى إلى الخزان ذات ارتفاع الماء الأخفض فلو فرضنا أن أرتفاع الماء في الخزان الأول أصبح 9m و في الخزان الثاني 6m فإن فرق المنسوب بينهما 9-6=3m أي $H_2 = 3m$

الحالة الأولى :



$H_1 = 4m$

$H_2 = ?$

ارتفع الماء في الخزان الأيمن بقدار 2m و بالتالي نحسب مقدار أنخفاض الماء في الخزان الأيسر من العلاقة

$$A_1 \times h_1 = A_2 \times h_2$$

(حيث A_1 و A_2 مساحة الخزانين الأيسر و الأيمن على التتالي ، h_1 و h_2 مقدار تغير منسوب الماء بالقيمة المطلقة في كل من الخزانين الأيسر و الأيمن على التتالي .)

$$h_1 \times 20 = 2 \times 10$$

$$\Rightarrow h_1 = 1m$$

أي ينخفض منسوب الماء في الخزان الأيسر بمقدار 1m .

نحسب H_2

$$H_2 = H_1 - h_1 - h_2$$

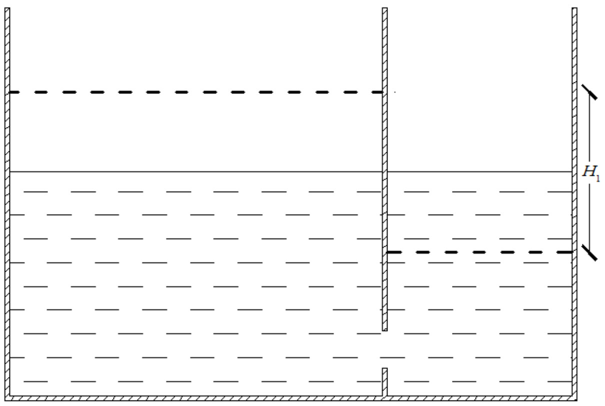
$$H_2 = H_1 - 2 - 1 = 1m$$

بتعويض المعطيات في القانون .

$$t = \frac{-2 \times 20 \times 10}{0.8 \times 20 \times 10^{-4} \times (20+10) \times \sqrt{2 \times 9.81}} \left[(1)^{\frac{1}{2}} - (4)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$t = 1881.3 \sec \approx 31.35 \min$$

الحالة الثانية :



$H_1 = 4m$

0 لأن الماء على منسوب واحد و بالتالي فرق المنسوب يساوي $H_2 = 0$

$$t = \frac{-2\times 20\times 10}{0.8\times 20\times 10^{-4}\times(20+10)\sqrt{2\times 9.81}}\left[(0)^{\frac{1}{2}}-(4)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$t = 3762.69\ \text{sec} \approx 62.71\ \text{min}$$

الحالة الثالثة :

لا يمكننا أن نعوض في القانون مباشرة لأن لدينا $A_1 = \infty$ و بالتالي سينتج لدينا عدم تعيين و لكي نتجاوز عدم التعيين نقسم بسط و مقام القانون على A_1 .

$$t = \frac{-2\cdot A_2}{C_d\cdot a\cdot(1+\frac{A_2}{A_1})\sqrt{2g}}\left[H_2^{\frac{1}{2}}-H_1^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$t = \frac{-2\times 10}{0.8\times 20\times 10^{-4}\times(1+0)\times\sqrt{2\times 9.81}}\left[2^{\frac{1}{2}}-4^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$t = 1653.1\ \text{sec} \approx 27.5\ \text{min}$$

الدوران القصري

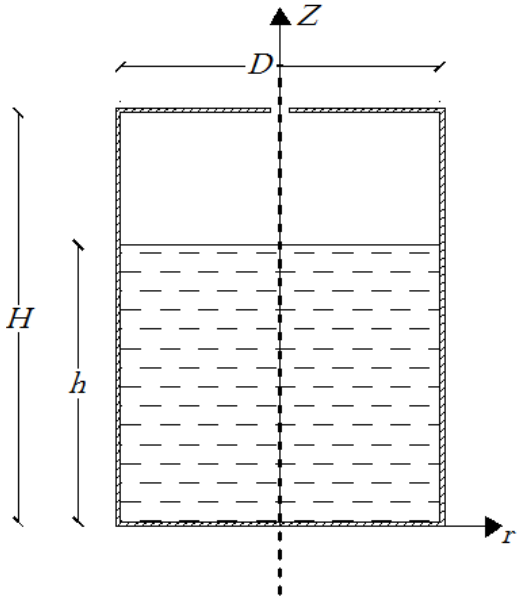
مسألة خارجية :

ما هي السرعة الزاوية التي يمكن للوعاء الأسطواني أن يدور بها حول محور شاقولي و التي يبدأ معها السائل بكشف قاع الوعاء .

علماً أن أرتفاع الوعاء H=2m

أرتفاع الماء في الوعاء h=1.25m

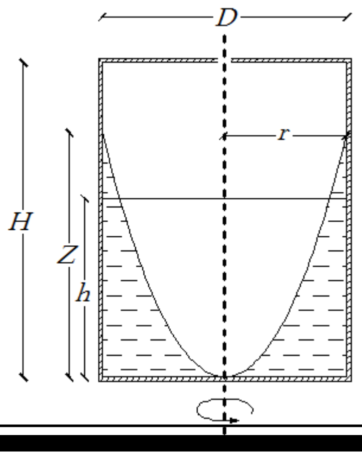
قطر الوعاء D=1m



الحل :

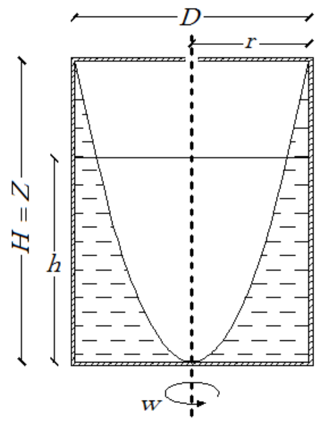
لدينا ثلاث حالات لتشكل القطع المكافئ (التجويف في السائل)

١ ـ ارتفاع القطع أصغر من ارتفاع الوعاء و نصف قطر القطع يساوي نصف قطر الوعاء $Z < H \ , \ r = \dfrac{D}{2}$



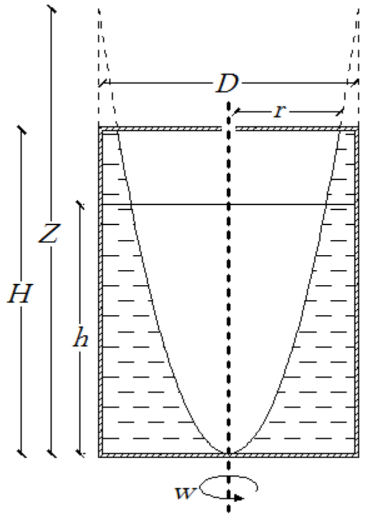
٢ ـ ارتفاع القطع يساوي ارتفاع الوعاء و نصف قطر القطع يساوي نصف قطر الوعاء

$$Z = H \;,\; r = \frac{D}{2}$$



٣ ـ ارتفاع القطع أكبر أو يساوي ارتفاع الوعاء و نصف قطر القطع أصغر من نصف قطر الوعاء

$$Z \geq H \;,\; r < \frac{D}{2}$$



ملاحظة : لماذا قلنا أصغر أو يساوي لأن الطول الحقيقي للقطع أكبر من طول الوعاء و لكن بما أن الوعاء مغطى فالماء لا يستطيع أن يخرج من الوعاء و بالتالي يبقى ارتفاع القطع مساويا لارتفاع الوعاء كما هو موضح في الرسم

نفرض تشكل إحدى الحالتين الأولى أو الثانية

حجم الماء بعد التدوير = حجم الماء قبل التدوير

$$h \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = Z \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot Z$$

(حجم القطع المكافئ الدوراني يساوي نصف حجم الاسطوانة التي تحتويه)

$$h = Z - \frac{1}{2} Z$$

$$h = \frac{1}{2} Z$$

$$Z = 2h$$

$$Z = 2 \times 1.25 = 2.5m > 2m$$

و بالتالي ارتفاع القطع أكبر من ارتفاع الوعاء أي أن الحالة الثالثة هي المتحققة فعليا

$$Z \geq H \ , \ r < \frac{D}{2}$$

حجم الماء بعد التدوير = حجم الماء قبل التدوير

$$h \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = H \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot D_o^{\ 2}}{4} \cdot H$$

$$\Rightarrow D_o = D\sqrt{2 \cdot (1 - \frac{h}{H})}$$

حيث D_o قطر القطع المكافئ الدوراني

$$D_o = D\sqrt{2 \cdot (1 - \frac{1.25}{2})} = 0.866m$$

معادلة القطع المكافئ المتشكل $Z = \frac{w^2 \cdot r^2}{2g} + c$ (تم استنتاجها في النظري)

نمرر المحاور الإحداثية من ذروة القطع فتصبح c=0 و بتعويض كل من

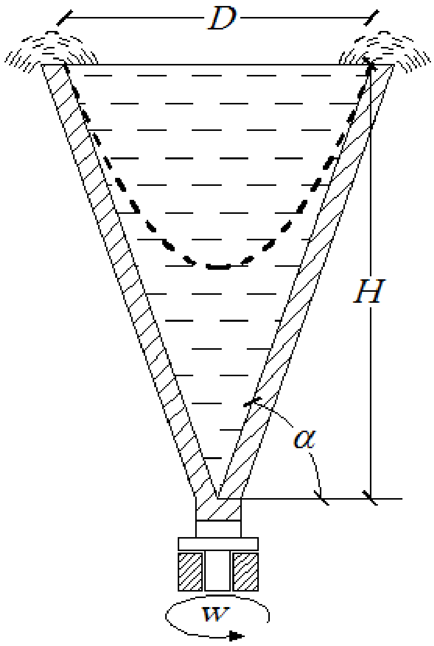
$$r = \frac{D}{2} = \frac{0.866}{2} \quad \text{و} \quad Z = H = 2m$$

$$2 = \frac{w^2 (\frac{0.866}{2})^2}{2 \times 9.81}$$

$$\Rightarrow w = 14.467 \ rad/\sec$$

المسألة التاسعة صفحة 267

تم تعريض وعاء على شكل مخروط دوراني ، قطر قاعدته D و ارتفاعه H و مملوء بالكامل بالماء و مكشوف من الأعلى ، إلى حركة دورانية ، كما في الشكل . احسب السرعة الزاوية w التي يجب أن يدور بها الوعاء ، و كمية المياه التي تنسكب منه ، بحيث يكون سطح الماء بعد التدوير مماساً للسطح الجانبي للمخروط عند النقطة A



الحل :

نحسب w

$$Z = \frac{w^2 \cdot r^2}{2g} + c$$

$$\frac{dZ}{dr} = \frac{2 \cdot w^2 \cdot r}{2g}$$

$$\frac{w^2 \cdot r}{g} = \tan\alpha$$

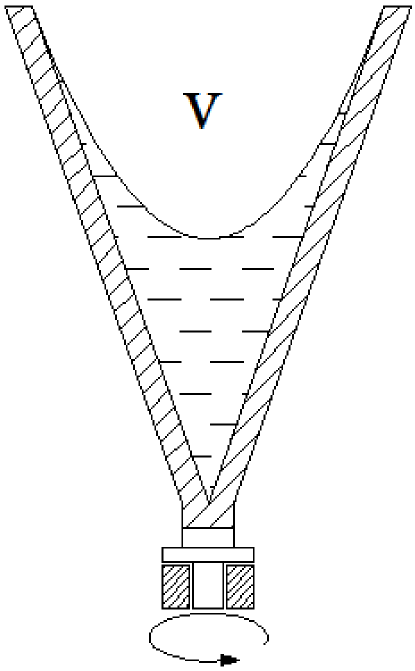
من الشكل $\tan\alpha = \frac{H}{\frac{D}{2}}$

$$r=\frac{D}{2} \text{ حيث } \frac{w^2\cdot D}{2g}=\frac{H}{\frac{D}{2}}$$

$$w=\frac{2}{D}\sqrt{g\cdot H}$$

حساب كمية الماء التي تنسكب من الوعاء

إن كمية الماء المنسكبة تساوي حجم القطع الدوراني المتشك (لأن الوعاء مملوء بالماء فلكي يتشكل القطع المكافئ الدوراني يجب أن ينسكب من الوعاء كمية من الماء مساوية لحجم هذا القطع)



$$\text{حجم القطع} = v=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4}\cdot Z$$

$$Z=\frac{w^2\cdot r^2}{2g}$$

$$Z=\frac{\frac{4}{D^2}\cdot(g\cdot H)\cdot D^2}{4\cdot 2\cdot g}$$

$$\text{أرتفاع القطع } Z=\frac{1}{2}H$$

$$\Rightarrow v=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{D^2}{4}\cdot\frac{H}{2}=\frac{\pi\cdot D^2\cdot H}{16}$$

أنتهـــــــــــــــــــت الـــــــــــــــمحاضرة

Written By: Husam

mh-magd @hotmail.com