## المحاضرة الثامنة

المهندسة : فداء عنتور                                    المادة : هيدروليك

## الجريان المثالي

الفتحة صغيرة : $\frac{d}{H} < 0.1$ (ضاغط ثابت )

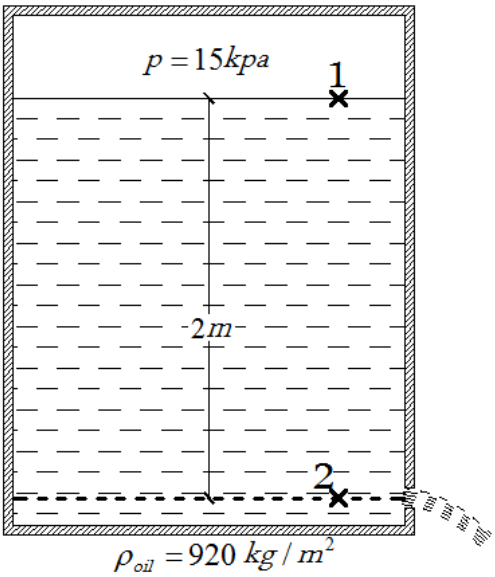
أي : إذا كانت نسبة قطر الفتحة إلى ارتفاع الماء في الخزان أصغر من 0.1 و الضاغط ثابت ( منسوب الماء ثابت )فإن التصريف ثابت على كامل الفتحة أما إذا كانت النسبة أكبر من ذلك فيكون التصريف متغيير و نلجأ إلى التكامل و في ما يلي مثالين على ما سبق

**مسألة :**

احسب الغزارة المارة من الخزان عبر الفتحة الواقعة في جانبه علما أن $c_d = 0.74$ ،

$d = 70mm$

**الحل :**




( لاحظ أن $\frac{d}{H} < 0.1$ و بالتالي التصريف ثابت )

$Q = v \cdot A$

نطبق معادلة بيرنولي بين 1 و 2

$$\frac{p_1}{\gamma_{oil}} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{p_2}{\gamma_{oil}} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2$$

$\frac{v_1^2}{2g} = 0$ لانعدام سرعة السائل في 1

$Z_1 = 0$ باعتبار مستوي المقارنة يمر من 1

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2g \cdot (Z_1 + \frac{p_1}{\gamma_{oil}})}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \times 9.81 \times (2 + \frac{15 \times 10^3}{920})} = 8.4m/\sec$$

$$Q_{th} = v_2 \cdot A = 8.4 \times \pi \times \frac{0.07^2}{4}$$

$$Q_{th} = 0.032\ m^3/\sec$$

$$Q_a = C_d \cdot Q_{th} = 0.74 \times 0.032$$

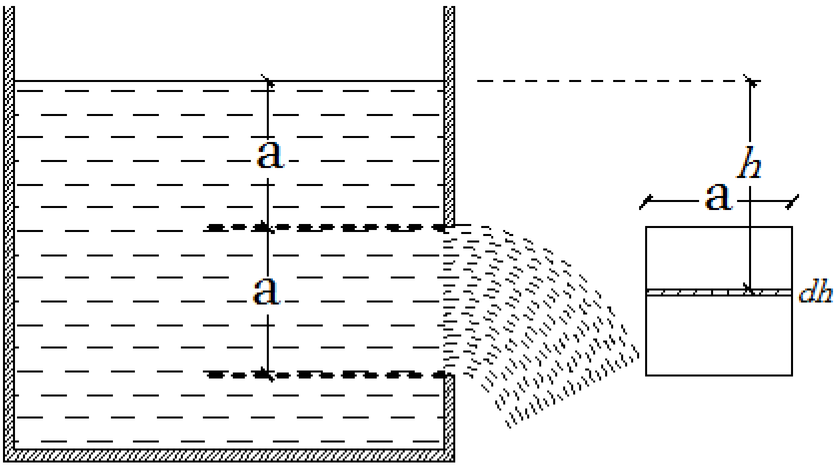
$$Q_a = 0.024\ m^3/\sec$$

$\frac{8}{266}$ - نفذت في أحد الجدران الشاقولية للخزان المبين في الشكل فتحة . فكانت أولاً على شكل مثلث عرض قاعدته يساوي ارتفاعه و يساوي a=1m ، ثم نفذت على شكل مربع طول ضلعه a=1m ، فإذا علمت أن بعد الحافة العلوية للفتحة عن سطح الماء في الحالتين هو h=a=1m ، احسب الغزارة التي يمكن للفتحة أ ن تمررها في كل حالة ، بعأفتراض أن منسوب الماء في الخزان ثابت ، و أن معامل التصريف للفتحة المثلثية $c_d = 0.63$ و للفتحة المربعة $c_d = 0.60$

**الحل** :

(لاحظ أن النسبة $\frac{d}{H} > 0.1$ في الحالتين و تساوي 0.5 وبالتالي التصريف متغير على طول الفتحة في كل من الحالتين و نلجأ إلى التكامل )

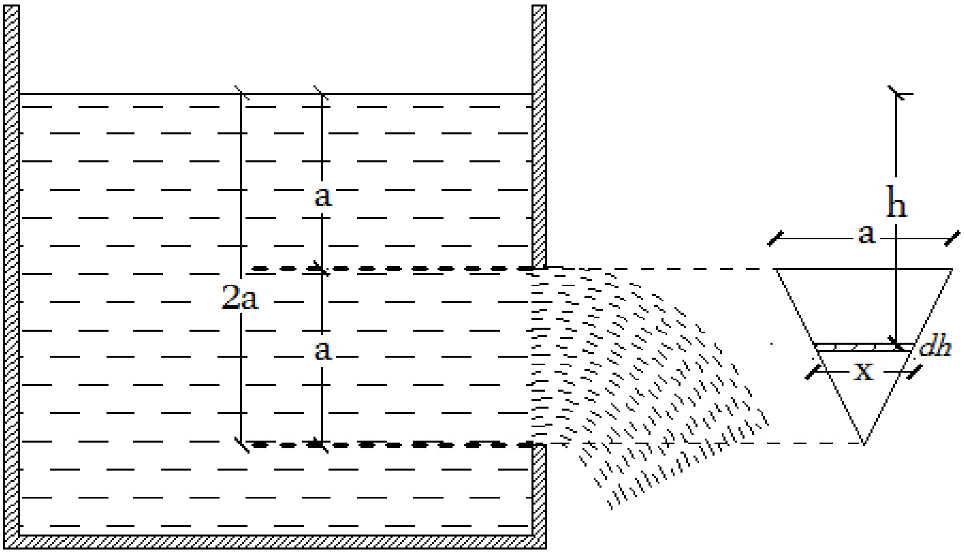
**الحالة الأولى الفتحة مربعة**




$$Q = v \cdot A$$
$$dQ = v \cdot dA$$
$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$
$$dA = a \cdot dh$$
$$Q = \int dQ$$
$$Q = \int \sqrt{2gh}.a.da$$
$$Q = a \cdot \sqrt{2g} \cdot \int_a^{2a} h^{\frac{1}{2}} \cdot dh$$
$$Q = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \sqrt{2g} \cdot \left[ h^{\frac{3}{2}} \right]_a^{2a}$$

$$Q = \frac{2}{3} \times 1 \times \sqrt{2 \times 9.81} \times \left[ 2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right]$$
$$Q_{th} = 5.40 \ m^3 / \sec$$
$$Q_a = 0.6 \times 5.40 = 3.34 \ m^3 / \sec$$

**الحالة الثانية: الفتحة بشكل مثلث**




$$Q = v \cdot A$$
$$dQ = v \cdot dA$$
$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$
$$dA = x \cdot dh$$

من تشابه المثلثات

$$\frac{x}{a} = \frac{2a - h}{a} \Rightarrow x = 2a - h$$

$$Q = \int dQ = \sqrt{2 \cdot g} \int h^{\frac{1}{2}} \cdot (2a - h) \cdot dh$$

$$Q = \sqrt{2 \cdot g} \cdot \left[ \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot a \cdot h^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot h^{\frac{5}{2}} \right]_{H_1}^{H_2}$$

$$Q_{th} = \sqrt{2 \times 9.81} \times \left[ \frac{4}{3} \times 2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \times 2^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right]$$

$$Q_{th} = 2.547 \ \ m^3 / \sec$$

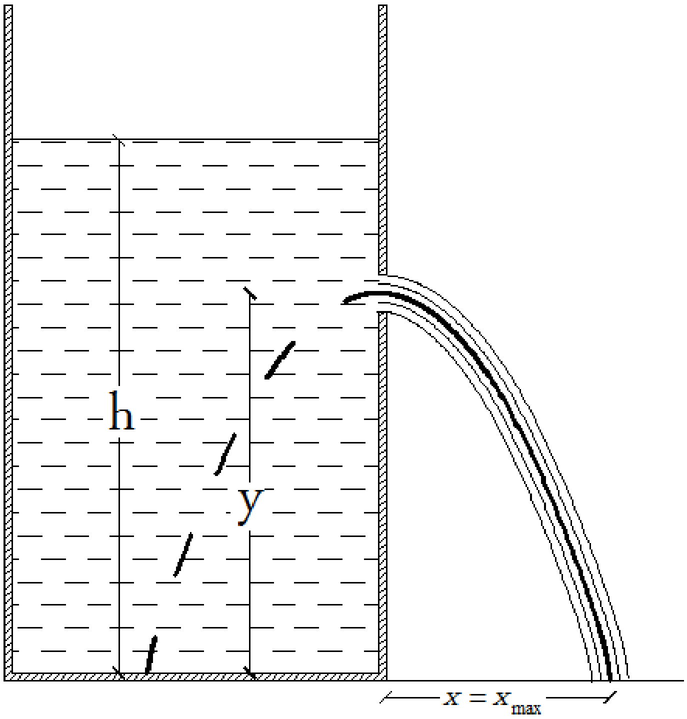
$$Q_a = Q_{th} \cdot C_d = 1.605 \ \ m^3 / \sec$$

---

**$\frac{7}{266}$ - و هي مشابهة للمسألة المحلولة $\frac{12}{250}$ و التي يجب قراءتها**

نفذت في الجدار الشاقولي للخزان المبين في الشكل فتحة صغيرة . فإذا علمت أن عمق الماء في هذا الخزان هو h . احسب على أي ارتفاع y من قاع الخزان يجب أن تنفذ هذه الفتحة ، بحيث يخرج التيار منها إلى أطول مسافة . علما أن منسوب الماء في الخزان ثابت .

**الحل** :




من معادلة بيرنولي نستنتج

$$v_{th} = \sqrt{2 \cdot g(h-y)}$$

دراسة حركة تيار الماء الخارج من الفتحة

على المحور x

$$\sum F_x = m \cdot a = 0 \Rightarrow a = 0$$

التسارع معدوم فالحركة مستقيمة منتظمة على المحور x

تابع المسافة : $x = v_a \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_a}$

على المحور Y

$$\sum F_y = m \cdot a = m \cdot g$$

$$\Rightarrow a = g$$

فالتسارع ثابت و يساوي تسارع الجاذبية الأرضية فالحركة مستقيمة متغييرة بالنتظام على المحور Y

و تابع المسافة يعطى بالعلاقة $\Rightarrow Y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

و بتعويض قيمة t : $Y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_a^2}$

و بتعويض قيمة $v_a$ المستنتجة من معادلة بيرنولي

$Y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{C_v^2 \cdot 2 \cdot g \cdot (h-y)}$ و هي معادلة المسار (معادلة قطع مكافئ)

$$\Rightarrow x^2 = 4 \times C_v^2 \times (h-y) Y$$

$$x = 2 \cdot C_v \cdot \sqrt{(h-y) \cdot Y}$$

يصل السائل إلى أقصى مدى عندما $\frac{dx}{dy}=0$

أي $\frac{dx}{dY}=0 \Rightarrow x=x_{\max}$

نشتق بالنسبة لـ Y

$$\frac{dx}{dY}=\frac{2\cdot C_v\cdot(h-2y)}{2\cdot(\sqrt{(h-y)\cdot Y}}=0$$

$$\Rightarrow C_v\cdot(h-2y)=0\Rightarrow \boxed{y=\frac{h}{2}}$$

---

**فكرة** :

هذه المسألة مشابهة تماما لمسائلة طائرة ترمي قذيفة في مادة الفيزياء للبكالوريا على اعتبار القذيفة هي تيار الماء و $v_a$ ( سرعة خروج الماء من الفتحة ) هي ذاتها السرعة الإبتدائية للقذيفة أو سرعة الطائرة و ارتفاع الطائرة هو ذاته ارتفاع الفتحة في الخزان و لكن ما الذي جعل الدكتورة تحل بهذه الطريقة و لم تحل بالطريقة الاعتيادية التي كنا نسلكها و ذلك بتعويض Y=y أي بتعويض قيمة أرتفاع الفتحة في معادلة الحركة على المحور Y فينتج لدينا الزمن اللازم لوصول الماء أو القذيفة إلى سطح الأرض ثم نعوض الزمن في معادلة الحركة على المحور x فينتج لدينا المدى أو $x_{\max}$

و للإجابة على هذا السؤال يجب أن نسأل أنفسنا كم مجهول لدينا في كل من المسألتين

في مسألة الطائرة لدينا ثلاثة مجاهيل و هي t , x , Y إلا أن Y معلومة و تساوي أرتفاع الطائرة و بالتالي نحن لدينا مجهولين فقط و بحاجة إلى لمعادلتين

أما في مسألتنا فلدينا أربعة مجاهيل و هي t , x , Y , y (حيث y أرتفاع الفتحة أما Y فتمثل إحداثي نقطة على المحور Y ) و بما أن y=Y ( دون أن ننسى أن y ارتفاع الفتحة هو أيضا متغيير و نريد حسابه ) و بالتالي نحتاج إلى ثلاث معادلات

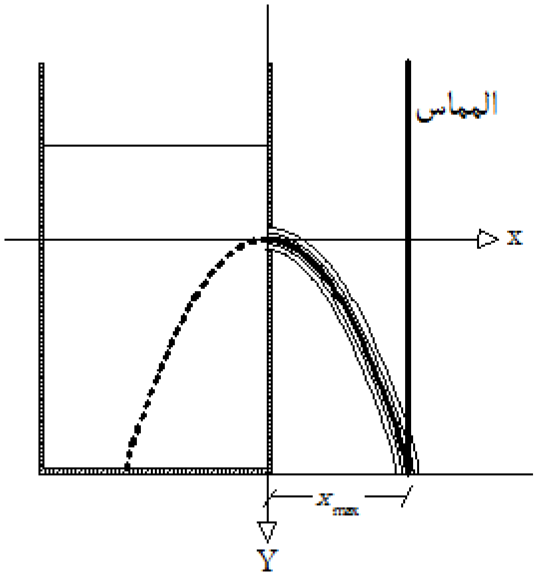
الأولى هي معادلة الحركة على المحور x و هي تربط بين x و t $x=v_a\cdot t$

و الثانية هي معادلة الحركة على المحور Y و هي تربط بين كل من y و t $Y=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$

و بحذف t من المعادلتين السابقتين نصل إلى معادلة المسار $Y=\frac{1}{2}\cdot g\cdot\frac{x^2}{v_a^2}$ ولكن لا يمكن اعتبار معادلة المسار معادلة ثالثة لأنها نتجت عن المعادلتين السابقتين و نحن بحاجة إلى معادلة مستقلة تماما بالتالي نأخذ المعادلة $\frac{dx}{dY}=0$

**من أين أتينا بهذه المعادلة ؟**

لكي يصل تيار الماء الخارج من الفتحة إلى أقصى بعد عن الفتحة يجب أن يكون المماس لمسار السائل (القطع المكافئ) عند ذلك البعد عاموديا على المحور x (تقريبا) أي $\alpha = 90$ كما في الشكل




وبالتالي $\tan\alpha = \infty$ (حيث $\alpha$ الزاوية بين المحور x و المماس )

و بالتالي ميل المماس $= \infty$

أي $\infty = \frac{dY}{dx} = m$ حيث $\frac{dY}{dx}$ مشتق معادلة القطع بالنسبة لـ x

$$\frac{1}{\frac{dY}{dx}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$\frac{dx}{dY} = 0$ أي مشتق معادلة القطع بالنسبة لـ Y

و هو المطلوب

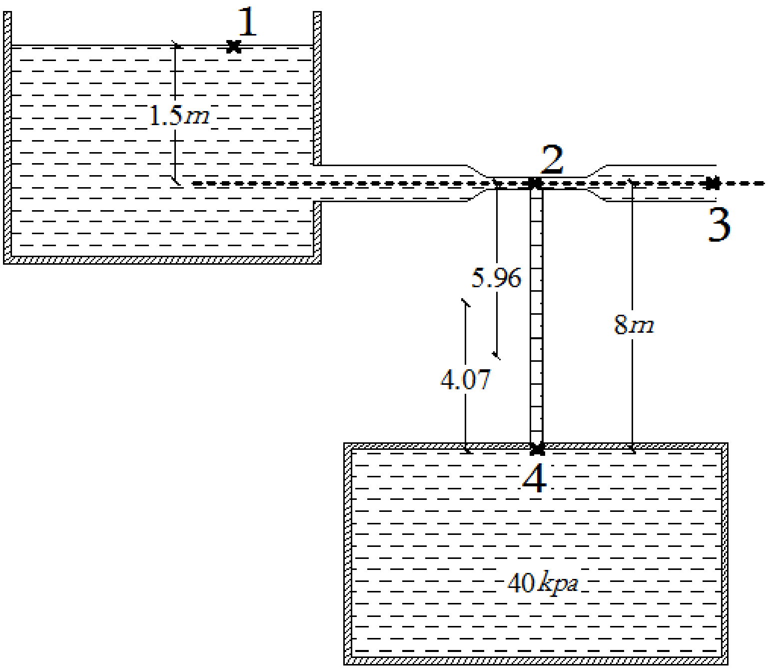
---

**مسألة خارجية**

هل يمكن للماء الموجود في الخزان السفلي و الذي يتعرض لضغط داخلي قدره 40kpa الصعود و الدخول إلى الأنبوب الأفقي ؟ و لماذا ؟

علما أن الضياعات مهملة

**الحل :**




نطبق معادلة بيرنولي بين 2 و 3

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}+Z_1=\frac{p_3}{\gamma}+\frac{v_3^2}{2g}+Z_3$$

$$\frac{p_3}{\gamma}=0 \text{ و } Z_3=0 \text{ و } \frac{v_1^2}{2g}=0 \text{ و } \frac{p_1}{\gamma}=0$$

$$\Rightarrow v_3=\sqrt{2\cdot g\cdot Z_1}=\sqrt{2\cdot 9.81\cdot 1.5}$$

$$v_3=5.43 \ m/\sec$$

$$Q=v_2\cdot A_2=v_3\cdot A_3$$

$$Q=5.43\times\frac{30\times 10^{-3}}{4}=0.0038 \ m^3/\sec$$

$$v_2=\frac{Q}{A_2}$$

$$v_2=\frac{0.0038}{\pi\cdot\frac{0.02^2}{4}}=12.1 \ m/\sec$$

نطبق بيرنولي بين 1 و 2

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}+Z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+Z_2$$

$$Z_2=0 \text{ و } \frac{v_1^2}{2g}=0 \text{ و } \frac{p_1}{\gamma}=0$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = Z_1 - \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = 1.5 - \frac{12.1^2}{2\times 9.81} = -5.96m$$

أي أن الضغط في النقطة 2 يستطيع أن يرفع الماء من الأنبوب الشاقولي من على عمق 5.06
نحسب ارتفاع الماء في الانبوب الشاقولي و الناتج عن الضغط الموجود في الخزان السفلي

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{40\times 10^3}{9810} = 4.07\ m$$

و بالتالي عمق الماء في الأنبوب

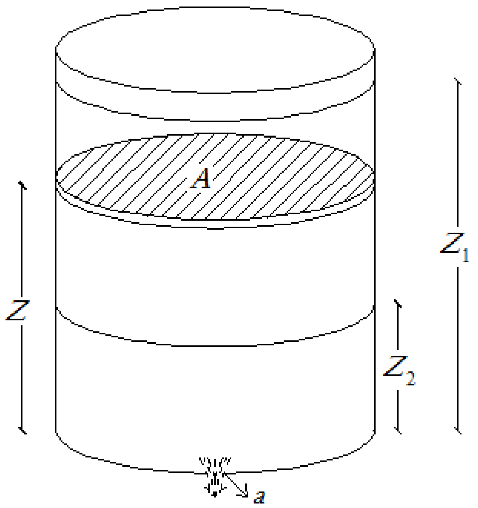
$$8 - 4.07 = 3.93$$

إذا الماء يصعد إلى الأنبوب الأفقي و يشارك في الجريان لأن 3.93<5.96

---

**زمن تفريغ خزان ( حيث الضاغط على الفتحة غير ثابت )**

١) الخزان ثابت المقطع




$$-A\cdot dZ = Q\cdot dt$$

$$Q_a = C_d\cdot a\cdot\sqrt{2g\cdot Z}$$

$$dt = \frac{-A\cdot dz}{C_d\cdot a\sqrt{2g\cdot Z}} = \frac{-A}{C_d\cdot a\sqrt{2g}} Z^{-\frac{1}{2}}\cdot dZ$$

$$t = \frac{-A}{C_d\cdot a\sqrt{2g}}\int_{Z_1}^{Z_2} Z^{-\frac{1}{2}}\cdot dZ$$

$$\Rightarrow t = \frac{-A}{C_d\cdot a\sqrt{2g}}\left[Z_2^{\frac{1}{2}} - Z_1^{\frac{1}{2}}\right]$$

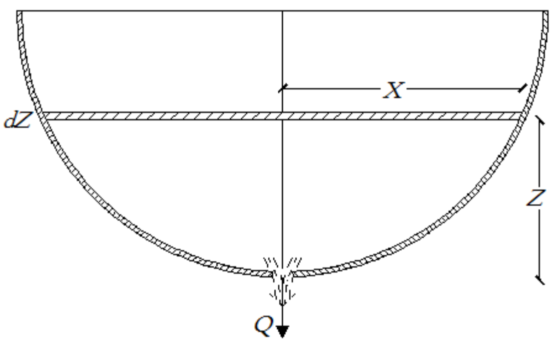
٢) الخزان متغير المقطع

$$t = \frac{-1}{C_d\cdot a\sqrt{2g}}\int_{Z_1}^{Z_2} A\cdot Z^{-\frac{1}{2}}\cdot dZ$$

---

$\frac{15}{270}$ الخزان المبين في الشكل على شكل نصف كرة نصف قطرها R=0.1m و يحتوي في أسفله على فتحة مساحتها $A = 4mm^2$ و معامل تصريفها $C_d = 0.6$ احسب الزمن اللازم لخفض ارتفاع الماء فيها نصف العمق .

الحل :

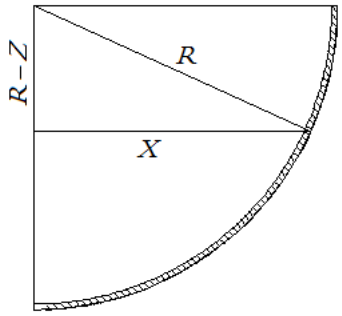



الخزان متغير المقطع و بالتالي نطبق القانون

$$t = \frac{-1}{C_d\cdot a\sqrt{2g}}\int_{Z_1}^{Z_2} A\cdot Z^{-\frac{1}{2}}\cdot dZ$$

$A = \pi \cdot x^2$

حسب فيثاغورث




$x^2 = R^2 - (R - Z)^2$

$x^2 = -Z^2 + 2R \cdot Z$

بالتعويض في القانون

$$t = \frac{-1 \cdot \pi}{C_d \cdot a\sqrt{2g}} \int_R^{\frac{R}{2}} (2R \cdot Z^{\frac{1}{2}} - Z^{\frac{3}{2}}) dz$$

$$t = \frac{-\pi}{C_d \cdot a\sqrt{2g}} \left[ 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot R \cdot Z^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot Z^{\frac{5}{2}} \right]_R^{\frac{R}{2}}$$

$$t = \frac{-\pi}{0.6 \times 4 \times 10^{-6} \times \sqrt{2 \times 9.81}} \left(\frac{4}{3} \times 0.1 \times 0.05^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \times 0.05^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} \times 0.1 \times 0.1^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} \times 0.1^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$t = 497.7 \ \sec \quad = 8.25 \ \min ute$$

---

أنتهـــــــــــــــــــــــــــــــــت الـــــــــــــــــــــــــمحاضرة

Written By: Husam

mh-magd @hotmail.com